

# METOD ZAMJENE

Prethodne sedmice smo naučili dva metoda za rješavanje sistema linearnih jednačina: metod suprotnih koeficijenata i grafički metod. Treći metod koji ćemo proučiti u ovoj lekciji je **metod zamjene**.

Postupak ovog metoda: izabrati jednu od dvije date jednačine i iz nje izraziti jednu od nepoznatih preko druge nepoznate, a zatim tu nepoznatu u drugoj jednačini zamjeniti dobijenim izrazom. Na taj način dobija se jedna jednačina sa jednom nepoznatom. Kada izračunamo tu nepoznatu dobijenu vrijednost uvrstimo u zamjenu i dobijemo drugu nepoznatu.

Savjet: prilikom odabira nepoznate za zamjenu, treba izabrati onu koja ispred sebe ima koeficijent (broj) koji olakšava račun.

Pogledajmo na primjerima.

**Primjer 1** : Riješiti sistem jednačina metodom zamjene

$$\begin{aligned}x + 3y &= 25 \\ 2x - 5y &= -27\end{aligned}$$

**Rješenje:**

U jednoj od jednačina treba izraziti jednu nepoznatu preko druge. Druga jednačina se samo prepíše. U ovom slučaju, najlakše je izraziti  $x$  iz prve jednačine.

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{2x - 5y} &= \underline{-27}\end{aligned}$$

Sada se prva jednačina prepisuje, a u drugoj umesto nepoznate  $x$  stavlja ono što je jednako  $x$ , a to je u ovom slučaju  $25 - 3y$ . Na taj način druga jednačina postaje jednačina sa jednom nepoznatom, pa je lako izračunati tu nepoznatu.

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{2 \cdot (25 - 3y) - 5y} &= \underline{-27}\end{aligned}$$

Izraz koji mijenja  $x$  je stavljen u zagradu jer se čitav taj izraz množi brojem 2, koji stoji uz  $x$ . Ostatak zadatka je običan račun.

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{50 - 11y} &= \underline{-27}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{-11y} &= \underline{-27 - 50}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{-11y} &= \underline{-77}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{y} &= \underline{-77/(-11)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3y \\ \underline{y} &= \underline{7}\end{aligned}$$

Sada treba u prvoj jednačini umjesto  $y$  napisati dobijeni broj i izračunati drugu nepoznatu, tj.  $x$ .

$$\begin{aligned}x &= 25 - 3 \cdot 7 \\ \underline{y} &= \underline{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 25 - 21 \\ \underline{y} &= \underline{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 4 \\ \underline{y} &= \underline{7}\end{aligned}$$

Rješenje sistema jednačina je uređeni par brojeva:  $(x, y) = (4, 7)$ .

**Primjer 2:** Riješiti sistem jednačina metodom zamjene:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 6 \\ -4x + y &= 2\end{aligned}$$

**Rješenje:** Izabraćemo jedan „najljepši“ koeficijent i izraziti tu promjenljivu iz te jednačine:

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 6 \\ -4x + y &= 2\end{aligned} \Rightarrow y = 2 + 4x$$

Zamijenimo promjenljivu u drugoj jednačini i riješićemo je:

$$2x + 3(2 + 4x) = 6$$

$$2x + 6 + 12x = 6$$

$$14x = 0$$

$$x = 0$$

Na kraju, zamjenimo dobijenu vrijednost u izraz za drugu promjenljivu:

$$y = 2 + 4 \cdot 0 = 2$$

I ne zaboravimo da napišemo rješenje:  $(x, y) = (0, 2)$ .

**Primjer 3:** Riješiti sistem metodom zamjene:

$$2x + 3y = 3$$

$$2x - 3y = -1$$

**Rješenje:**

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x = 3 - 3y \\ 2x = 3 - 3 \cdot \frac{2}{3} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 3 - 3y - 3y = -1 \\ 3 - 6y = -1 \\ -6y = -4 \\ y = \frac{2}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x = 3 - 2 \\ 2x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} \quad (x, y) = \left( \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$$

**Primjer 4:** Riješiti sistem jednačina metodom zamjene:

$$\frac{x-y}{3} + 3 = 5 - \frac{x+y}{5}$$
$$\frac{x-2}{2} - \frac{3y+1}{2} = -1.$$

**Rješenje:** Vidimo da ovaj sistem nije prost pa ga moramo uprostiti. Obje jednačine ćemo pomnožiti sa NZS i osloboditi se razlomka. Kasnije ćemo se, množenjem, riješiti zagrada.

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{3} + 3 &= 5 - \frac{x+y}{5} \dots\dots / \cdot 15 \\ \frac{x-2}{2} - \frac{3y+1}{2} &= -1 \dots\dots / \cdot 2 \\ \underline{5(x-y) + 45} &= \underline{75 - 3(x+y)} \\ \underline{1(x-2) - 1(3y+1)} &= \underline{-2} \\ 5x - 5y + 45 &= 75 - 3x - 3y \\ \underline{x - 2 - 3y - 1} &= \underline{-2} \\ 5x - 5y + 3x + 3y &= 75 - 45 \\ \underline{x - 3y} &= \underline{-2 + 2 + 1} \\ 8x - 2y &= 30 \\ \underline{x - 3y} &= \underline{1} \end{aligned}$$

Dobili smo prost sistem. Najlakše je da iz druge jednačine izrazimo x i uvrstimo u prvu.

$$\begin{aligned} 8x - 2y &= 30 \\ \underline{x} &= \underline{1 + 3y} \\ 8(1 + 3y) - 2y &= 30 \\ 8 + 24y - 2y &= 30 \\ 22y &= 30 - 8 \\ 22y &= 22 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Kada smo dobili y uvrstimo u zamjenu i dobijemo x.

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3y \\ x &= 1 + 3 \cdot 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje je  $(x,y) = (4, 1)$ .

**Primjer 5:** Metodom zamjene riješi sistem jednačina

$$\begin{aligned} (x-5) \cdot (x+5) - (1-3y) &= x^2 + 4 \\ (2x+y) - y \cdot (y+2) &= 2 - y^2. \end{aligned}$$

**Rješenje:**

$$x^2 - 5x + 5x - 25 - 1 + 3y = x^2 + 4$$

$$\underline{2x + y - y^2 - 2y = 2 - y^2}$$

$$x^2 - x^2 + 3y = 4 + 25 + 1$$

$$\underline{2x + y - y^2 - 2y + y^2 = 2}$$

$$3y = 30$$

$$\underline{2x - y = 2}$$

$$y = \frac{30}{3} \rightarrow y = 10$$

$$2x - y = 2$$

$$2x - 10 = 2$$

$$2x = 10 + 2$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2} \rightarrow x = 6$$

$$(x, y) = (6, 10)$$

**Domaći zadatak!!!**

Riješi sisteme jednačina metodom zamjene:

•

$$2x + y = 0$$

$$x - y = 3.$$

•

$$0,7x = 2 - (0,3y + x)$$

$$\frac{y-3}{2} = 0,2x - 1,2.$$

•

$$\frac{4x-1}{6} - \frac{2(x-y)}{3} = \frac{7}{6}$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{3x-y+1}{4}.$$